В. В. ЦЕЛИЩЕВ

Формальная онтология и номиналистическая семантика в философии математики Бертрана Рассела

Хотя «Principia Mathematica» Б. Рассела и А. Н. Уайтхеда считается чем-то вроде водораздела в развитии математической логики, математические достоинства этого монументального труда недооценены, а программа логицизма, какой она представлена в книге, преждевременно объявлена устаревшей. Что касается собственно математики, то сам Рассел был разочарован тем обстоятельством, что «Principia Mathematica» не стала системой, выбранной работающими математиками: «Люди интересовались тем, что говорилось о противоречиях, и вопросом о том, можно ли вывести обычную математику из чисто логических предпосылок, но они не интересовались математической техникой, разработанной в этой книге. Я знаю только шесть человек, которые прочитали последние части книги. Трое из них были поляками, впоследствии (наверное) убитыми Гитлером. Остальные трое были техасцами, впоследствии успешно ассимилировавшимися. Даже те, кто работал точно над такими же проблемами, не считали, что в “Principia Mathematica” о них сказано что-то стоящее»[*].

Отмеченный Расселом несколько утрированный факт находит отражение в книгоиздательской политике. Усеченный вариант книги издается под характерным заголовком «Principia Mathematica to § 56», т. е. это только часть первого тома из трех. В определенном отношении такая реакция со стороны математиков понятна, поскольку сам Рассел постоянно пытался преодолеть разрыв между метафизическими убеждениями и требованиями логического исчисления. Как известно, математиков метафизика в общем не интересует. Однако концепция формальной логики, как мы ее понимаем сегодня,

[*] *Russell B.* My Philosophical Development London, 1959. P. 86.

обязана в значительнейшей степени именно Расселу. Современному исследователю трудно даже представить, какой огромный скачок был сделан благодаря усилиям Рассела от метафизических концепций метафизики и логики XIX в. к современной математической логике, в существенной мере отделенной от проблем онтологии и эпистемологии.

Другим обстоятельством, которое препятствовало принятию математических идей Рассела, является трудность в понимании деталей его формализмов. Некоторые авторы эту трудность используют для откровенных нападок на Рассела. Так, в объемной биографии Рассела ее автор Р. Монк делает карикатуру из теории «Principia Mathematica», прибегая к «эмпирическим подтверждениям» того, что ее логика запутанна. Он якобы разослал шести авторитетным логикам просьбу изложить на языке этой логики утверждение естественного языка «честность есть лучшая политика». Пять из них прислали разные ответы, а шестой признался, что не знает, что и делать в этим. Интересно было бы понять, в какой степени тут играет роль отмеченная многими рецензентами книги неприязнь биографа к своему герою, которую он демонстрирует, — дело в том, что экспликация предложений обыденного языка формальными средствами едва ли представляется делом легким даже спустя сто лет. Но как бы то ни было, следует признать, что зачастую развитие идей идет не по желаемому автором пути, и развитие логики, в общем, пошло в другом направлении по сравнению с тем, которое предлагал Рассел. Однако изучение наследия мыслителя такого масштаба, как Рассел, крайне поучительно, потому что новые вопросы, новые проблемы и новая дискуссия дают импульс к тому, чтобы посмотреть на классику в новом ракурсе. Некоторые неисследованные концепции часто ведут к плодотворным результатам. К новым результатам в философии математики могут привести забытые пути и отброшенные идеи.

«Молодым» Расселом было предложено множество идей и подходов к преодолению кризиса в основаниях математики, один из симптомов которого был обнаружен им при открытии *парадокса Рассела*. Видный логик Г. Крайзель так коротко свидетельствует об эрудиции и творческом потенциале Рассела в тот период: «Работы Рассела затрагивали все вопросы, какие вообще могут прийти кому-нибудь в голову»*.

Расселовский путь реформирования оснований логики и математики объемлет дистанцию от «Principles of Mathematics» (1903) до «Principia Mathematica» (1910–1913). Между этими двумя веха-

* *Крайзель Г.* Биография Курта Геделя. М., 2003. С. 19.

ми в философии логики и математики Расселом предложена масса идей и подходов к преодолению парадоксов, из которых наиболее известны *Зигзаг-Теория, Теория Ограничения Размера* и *Не-Класс-Теория.* В *Зигзаг-Теории* мы начинаем с предположения, что пропозициональная функция определяет класс, когда она достаточно проста. Этот путь принял У. В. О. Куайн при конструировании своей системы *New Foundations.* Теория ограничения размера основана на идее, что должен быть некоторый предел, который не может превзойти ни один класс. Эта идея стала сердцевиной подхода Э. Цермеяо к аксиоматической теории множеств. Обе идеи в XX в. получили широкое распространение у логиков и математиков, но, как ни странно, сам Рассел, руководствуясь метафизическими соображениями, выбрал третье направление — *Не-Класс-Теорию,* которую развивал под названием *«Подстановочная Теория»*. Именно эта теория привлекла в основаниях математики наименьшее внимание исследователей, что объясняется ее «метафизической нагруженностью», а также историческими причинами: неопубликованные статьи Рассела по этой теории стали известны только начиная с 1970-х гг., когда был открыт доступ к его архиву в университете Мак-Мастера (Канада).

Хотя традиционно «Принципы математики» считается «предтечей» «Principia Mathematica», на самом деле это в высшей степени интересная работа, в которой сформулированы собственно метафизические доктрины Рассела, существенно определившие оригинальность его поисков. Здесь прежде всего следует отметить неудовлетворенность традиционной логикой и алгеброй Буля, объясняемую тем, что Рассел предпочитал интенсиональный подход к основаниям математики. Кроме того, Рассел был сторонником концепции языка как универсального медиума, в противоположность концепции языка как исчисления. Далее, Расселу нужна была такая трактовка отношений, в которой нуждалась математика. Поэтому он отверг принятую в британском абсолютном идеализме доктрину внутренних отношений, согласно которой отношения присутствовали в субъектах отношений, и принял доктрину внешних отношений, согласно которой отношения не зависели от соотносимых сущностей. Чрезвычайно важную роль в поисках Рассела играет убеждение в универсальности логики, не ограниченной какими-либо специфическими областями. Эта точка зрения находит отражение в предложенной им концепции переменной, которая напрямую связана с его ключевыми онтологическими концепциями. Последние содержат понятие терма, который может быть субъектом пропозиции. В «Принципах математики» к терминам и пропозициям добавляется пропозициональная функция. Хотя функция представляет собой стандарт в математике, для метафизика это понятие туманно. Оно в некотором аспекте неясно и для самого Рассела. Рассел отвергает понятие функции как соответствия, потому что это ведет к экстенсиональному взгляду, а для него отношения — интенсиональная сущность. Каждому термину соответствует существующая сущность, и в ходе эволюции от «Принципов математики» к «Principia Mathematica» платонистская философия у Рассела уступает место номиналистическим тенденциям.

Реконструкция логики, предпринятая Расселом, была направлена в первую очередь на устранение парадоксов. Для этой цели им была предложена ставшая знаменитой *Теория Типов*. Сама идея разделения сущностей на логические типы является весьма плодотворной. В определенной степени она связана и с доминирующей ныне в теории множеств итеративной концепцией с иерархией множеств. В 1908 г. появились две работы, посвященные поискам устранения парадоксов в теории множеств: концепция типов Рассела и аксиоматическая теория множеств Цермело. *Простая Теория Типов*, предотвращающая парадокс Рассела (а также парадокс Кантора), полагается вполне респектабельной и сейчас, особенно после усилий Рамсея в сведении *Разветвленной Теории Типов к Простой Теории Типов*. Считается, что *Разветвленная Теория типов* была предложена Расселом и Уайтхедом для решения не только теоретико-множественных, но и семантических парадоксов типа «Лжеца». *Разветвленная Теория Типов* не стала популярной в силу усложнения, вызванного добавлением порядков к типам. Это привело к необходимости *аксиомы сводимости*, которая не имела логического статуса и потому не встраивалась в логицизм.

Неудовлетворенность *Теорией Типов* в конечном счете выразилась в убеждении, что для достижения целей логицизма Рассел просто усложнил логику, чтобы вместить туда математику. Но судьба логицизма определялась и многими другими обстоятельствами. Условное наклонение в истории неприемлемо, но если бы сам Рассел не отошел от технической работы, если бы не критика со стороны Витгенштейна, если бы не преждевременная смерть Рамсея, если бы... Однако реконструкция обнаруженных рукописей Рассела дает надежду на то, что логицизм может быть возрожден при определенных его модификациях незаслуженно забытой *Подстановочной Теорией*. Такая судьба постигла не только некоторые чисто логические исследования Рассела. В этом отношении показательна история с обнаружением рукописи готовой книги по теории познания, к которой Рассел потерял интерес в силу ряда жизненных перипетий, а также из-за критики идей книги Л. Витгенштейном. Между тем Я. Хинтикка считает, что онтология и семантика «Трактата» в общем и целом аналогичны расселовским. Более того, одна из глав книги Хинтикки о Витгенштейне недвусмысленно названа «Мысли Рассела под заглавием “Логико-философский трактат”».

Психологическая трудность в представлении новых открытий при исследовании творчества Рассела зачастую состоит в том, что они касаются технических деталей, которые, по общему убеждению, мало что могут изменить в оценке его вклада в математику и философию, потому что часто люди довольствуются поверхностным подходом к известным интеллектуальным фигурам. В этом отношении весьма интересно свидетельство видного логика и философа С. Крипке: «В аналитической философии, в современной англо-саксонской философии расселовская статья “Об обозначении” явно не самая знаменитая статья из написанных в первой половине XX в. <...> Несмотря на это, она не очень читаема и часто просто плохо понята, — люди, быть может, считают, что могут довольствоваться чтением вторичной литературы и учебников или даже «Введением в математическую философию». И конечно же, *теория дескрипций* как таковая предстает очень простой»*.

Между тем поиски Расселом удовлетворительных способов разрешения парадоксов теории множеств и тем самым адекватных оснований математики, судя по огромному числу его статей, набросков, черновиков, по переписке из архива, — это и тупики, и брошенные разработки, и полные неудачи, и находки, и внезапные озарения, т. е. все, что вылилось в цельную программу одного из направлений великой троицы в основаниях математики — расселовского логицизма, сведения математики к логике.

Среди основных этапов эволюции взглядов Рассела в указанный период следует отметить прежде всего идеи, связанные с *принципом порочного круга.* Общепринятая точка зрения состоит в том, что в этом способе блокирования парадоксов Рассел солидаризировался с А. Пуанкаре. Однако такой взгляд вряд ли обоснован, поскольку Пуанкаре считал этот принцип аргументом против теории бесконечности Кантора, в то время как усилия Рассела были направлены на поиски оснований математики, которая бы включала теорию множеств Кантора. Предложенное Пуанкаре средство разрешения парадоксов связано с понятием *непредикативности,* которое позволяет избежать самореференции порочного круга. Однако, несмотря на общепринятый взгляд, Рассел адресовал запрет на непредикативные определения не ко всем парадоксам, а только к тому, что полагал истинными парадоксами, а именно, к теоретико-множественным парадоксам, которые, по его мнению, требовали

* *Kripke S.* Russell’s Notion of Scope // Philosophical Troubles: Collected Papers. Oxford, 2011. Vol. 1. P. 225.

переосмысления фундаментальных принципов логики. На самом деле ответом Рассела на предложение Пуанкаре явилась *Подстановочная Теория.* Г. Ландини полагает, что неопубликованная статья «Об “Insolubilia” и их разрешении символической логикой», в которой изложена *Подстановочная Теория,* представляет собой работу гения и, по сути, является наиболее важной для характеристики его философии математики. Другой исследователь философии Рассела, П. де Рулэн, говорит, что *Подстановочная Теория,* без сомнения, самая восхитительная из всех, которые придумал Рассел.

Принятая в «Принципах математики» онтология вскоре была заменена знаменитой *теорией дескрипций.* Последняя существенно позволила избавиться от «наивного» изобилия сущностей и стала основой *Не-Класс-Теории.* Это один из шагов в сторону принятия Расселом все более номиналистической точки зрения. Номинализация такого рода — результат радикального изменения в понимании концепции обозначения. Так, переход от пропозиции «Сократ смертен» к пропозициональной функции «x смертен» не есть абстракция, а есть результат подстановки. В этом случае подставляется переменная. Традиционно, в русле обычной математики, считается, что переменная есть схема для подстановки. Здесь ситуация обратная: переменная становится базисным понятием. Трудности, связанные с апелляцией переменной к всеобщности, которая включает бесконечность, чреватую парадоксами, Рассел пытался преодолеть с помощью концепции подстановки. В этом направлении его усилия оказались созвучными с усилиями Д. Гильберта в понимании всеобщности. Действительно, теорема x ($x + 1 = 1 + $ x) классическими математиками и интуиционистами понимается по-разному (первые интерпретируют ее истинность в терминах моделей, в то время как вторые — в терминах доказательства). Но между сторонниками обоих направлений существует согласие относительно каждого примера теоремы. Гильберт использовал именно такое понимание роли переменной, какое предложил Рассел.

Вопросы о семантике переменных до сих пор являются предметом дискуссий. Рассел конструирует переменную как интегральную часть пропозициональной функции. Первичной концепцией оказывается пример, или подстановка. Этот технический прием обусловлен радикальным шагом Рассела в отношении онтологии. Если в *Зигзаг-Теории* и *Теории Ограничения Размера* речь шла о нахождении критерия для различения «хороших» пропозициональных функций (которые определяют класс) и плохих (которые ведут к противоречию), то *Не-Класс-Теория* делает более радикальный шаг — полностью отказывается от задачи различения плохих и хороших пропозициональных функций. Пропозициональные функции, классы и натуральные числа больше не являются сущностями. Это просто символические конструкции, лингвистические сущности. Именно в этой связи Рассел употреблял оборот «переменные, имеющие структуру».

Подстановочная теория представляет собой в техническом отношении весьма тонкую конструкцию, подробности изложения которой требуют значительно большего объема, чем позволяет данная статья. Достаточно сказать, что эта теория использует один стиль переменной, но эмулирует логику, позволяющую квантификацию над интенсиональными атрибутами высших порядков с использованием *Простой Теории Типов,* заменяя разговор об атрибуте парой сущностей, а именно, пропозицией и сущностью, которая подставляется в нее.

Парадокс Рассела, который обычно формулируется в терминах классов, на самом деле изначально формулировался для пропозициональных функций. Пропозициональная функция, удовлетворяемая только теми пропозициональными функциями, которые не удовлетворяют сами себя, представляет собой парадокс. Здесь пропозициональная функция выступает в качестве значения самой себя, и разрешение парадокса, по мысли Рассела, должно состоять в отличении истин, включающих обозначающие комплексы, от истин, включающих обозначенные сущности. В более общем плане разрешение парадоксов связано с концепцией обозначения, в чем Рассел был убежден после разработки им теории дескрипций.

Со времени написания «Принципов математики» взгляды Рассела на соотношение пропозициональной функции и ее значений эволюционировало в сторону такого понимания, при котором пропозициональная функция была обозначением объекта, а ее значение — самим объектом. Из этого следовало, что первичными с логической точки зрения являются именно объекты, т. е. значения пропозициональной функции, которая сама по себе есть абстрактная форма подобных значений. Пропозициональная функция «x есть философ» и ее значение «Сократ есть философ» имеют одну и ту же структуру, что вполне понятно, поскольку эта пропозициональная функция есть абстракция от пропозиций «Сократ есть философ», «Платон есть философ», «Аристотель есть философ» и т. д. Рассел считал, что парадокс можно блокировать, если иногда не считать такую абстракцию отдельной сущностью, несмотря на общую форму значений функции. Другими словами, он считал, что парадокс возникает из-за того, что абстракция не является конституентой φx. (Здесь шляпка в выражении X играет роль кавычек как обозначающая концепция. Например, Сократ есть философ и «Сократ» есть имя философа.) Важно подчеркнуть, что обсуждаемый вид абстракции вполне естествен, и нужно понимание того, когда пропозициональная функция может считаться отдельной сущностью, а когда нет.

Этот вопрос существенно связан с концепцией обозначения. Рассел до написания «Об обозначении» исследовал несколько таких концепций, генезис которых позволяет понять его подход к *Подстановочной Теории*. Рассмотрим пропозициональную функцию $\hat{x} = \hat{x}$. При различных трактовках понятия пропозициональной функции (а их у Рассела предостаточно), она мыслится как нечто такое, что объединяет конституенты в целое (этакий «метафизический клей»). Значение пропозициональной функции для аргумента b получается в результате постановки a вместо переменной x. Это обстоятельство выражается в символизме Рассела следующим образом $(\hat{x} = \hat{x})\frac{a}{\hat{x}}$. Это новое выражение может быть интерпретировано как $(\hat{x} = a)\frac{a}{\hat{x}}$, и как $(a = \hat{x})\frac{a}{\hat{x}}$, и как $a = a$. Между тем все три выражения имеют разный смысл, хотя у них один и тот же денотат.

Но в свете нового подхода к проблеме указания (в работе «Об обозначении»), который Рассел принял в 1905 г., истинностное значение утверждений об обозначении сущностей не должно противопоставляться истинностным значениям утверждений об обозначаемых сущностях. Это повлекло за собой новое понимание подстановок, которое в техническом отношении выразилось в употреблении константы x вместо переменной.

Тогда $(\hat{x} = \hat{x})\frac{a}{\hat{x}}$ становится $(b = b)\frac{a}{b}$, где a и b — константы. Но в этом случае «b = b» становится предложением, а не функцией.

Далее, Рассел осуществляет стратегию, использованную им при конструировании теории дескрипций. Различие смыслов обозначающих выражений «Вальтер Скотт» и «автор “Веверлея”», как оно эксплицируется в этой теории, полностью аналогично тому, которое получается в *Подстановочной Теории*, где Расселу надо различать следующие выражения:

$$(b = b)\frac{a}{b}, (a = b)\frac{a}{b}, (b = a)\frac{a}{b}, a = a$$

Для этой цели вводится примитивное четырехместное отношение $p\,\frac{x}{y}!\,q$, означающее, что q есть результат подстановки x вместо y во всех вхождениях последнего в p. Далее вводится определенная дескрипция $(\iota q)p\,\frac{x}{y}!\,q$, которая определяется контекстуально.

В результате пропозициональная функция x=x как сущность заменяется так называемой матрицей, состоящей уже из двух сущностей, а именно, из пропозиции $b = b$ и сущности b. Главный итог всего этого предприятия заключается в том, что отпадает необходимость в квантификации над пропозициональной функцией и можно производить квантификацию над двумя другими сущностями, а именно, над пропозицией и сущностью, которая должна подставляться в пропозицию. Другими словами, пропозициональная функция заменяется матрицей. Получающаяся при этом формальная система сходна с *Простой Теорией Типов,* поскольку невозможно, чтобы матрица оказывалась аргументом самой себя. Тем самым блокируется парадокс Рассела, и не только он один.

Некоторые особенности новой системы видно из следующего примера: вместо утверждения $\forall\varphi\ (\varphi a \rightarrow \varphi b)$ в расселовской нотации пишется $(\forall p)(\forall x)\ (p\frac{a}{x} \rightarrow p\frac{b}{x})$. Здесь нужно подчеркнуть два обстоятельства. Во-первых, хотя, например, Г. Ландини утверждает, что термин «*Подстановочная Теория*» не имеет прямого отношения к концепции подстановочной квантификации, по сути, метод Рассела состоит в замене общего утверждения множеством конкретных подстановок, каждая из которых является просто термином. Если бы при этом этот термин был лингвистической сущностью, тогда мы имели бы случай подстановочной интерпретации кванторов. Однако ситуацию запутывает то, что матрица в методе Рассела не является «самостоятельным» термином или сущностью, поскольку является неполным символом в смысле *Теории Дескрипций. Подстановочная Теория* не позволяет пропозициональным функциям быть отдельными сущностями, а использование матрицы позволяет формальной системе делать все, что система может делать с помощью понятия пропозициональной функции.

Как уже было указано выше, польза от *Подстановочной Теории* двойная. С одной стороны, это избавление от онтологии пропозициональных функций, и данное обстоятельство ведет к возможности *Не-Класс-Теории* с контекстуальным определением классов, подобной *Простой Теории Типов.* С другой стороны, блокируются все парадоксы, связанные с понятием пропозициональной функции. Эти два аспекта тесно взаимосвязаны, потому что онтологическая «гигиена» Рассела позволяла дать чисто номиналистическую трактовку логики. «По-настоящему» существуют только индивиды.

Идеи, сформулированные в *Подстановочной Теории,* Рассел развивал в нескольких направлениях. Например, *Не-Класс Теория* может рассматриваться как следствие той же самой стратегии избавления от проблемных пропозициональных функций, что было проявлением стремления Рассела разрешать метафизические проблемы вкупе с логико-математическими. Реализм периода «Принципов математики» с превалирующей там доктриной о структуре логики, согласно которой термины предложения обозначали существующие объекты, постепенно уступил место номиналистической тенденции. *Теория Дескрипций* позволяла терминам давать контекстуальное определение, при котором устранялось предполагаемое указание ими объектов в пользу переменных и пропозициональных функций. Контекстуальное определение терминов для классов давало возможность считать их «неполными символами», значение которых обретается в контексте кванторов и переменных.

В литературе бытует ошибочный взгляд, согласно которому *Не-Класс-Теория* редуцирует понятие класса к другим сущностям, в частности к пропозициональным функциям. Успех такой редукции повсеместно считается неоправданным, так как искомая онтологическая экономия — замена абстрактных объектов (классов) — заканчивается неудачей, поскольку классы заменяются не менее абстрактными сущностями, а именно, пропозициональными функциями. На самом же деле дело обстоит не так. Во-первых, *Не-Класс-Теория* обеспечивает элиминацию утверждений о классах в пользу квантификации пропозициональных функций высших порядков. Во-вторых, упрек в том, что такая квантификация обязывает к онтологии абстрактных объектов, необоснован. Дело в том, что квантификация над индивидными переменными является объектной, или референтативной, а вот квантификация пропозициональных функций является подстановочной. Как известно, постановочная квантификация не влечет онтологических обязательств. При подстановочной интерпретации кванторов истинность или ложность кванторных формул зависит от истинности или ложности тех формул, которые получаются при замене переменной ее возможными значениями, когда «значениями» оказываются сами выражения, которые употребляются, а не упоминаются.

Здесь мы имеем еще один вариант идей из разряда подстановочных теорий, которых у Рассела было несколько. Ф. де Рулэн упоминает по крайней мере три такие теории. Все три версии *Подстановочной Теории* имеют общее:

1) сама подстановочная теория является аксиоматической системой, сформулированной в безтиповом формальном языке;

2) правила перевода позволяют переводить теории с типовой стратификацией в бестиповую теорию.

Основная идея при том состоит в том, чтобы представить теорию с типовой стратификацией с предикатными переменными в бестиповой теории. Рассмотрим пример «действия» подстановочной логики, а именно, то, как осуществляется перевод *Простой Теории Типов* с предикатными переменными. Пусть имеется выражение на языке теории типов:

$$\exists F(0)\forall x(0)(F(0)x0 \leftrightarrow \mathrm{x}0 = \mathrm{x}0).$$

В подстановочном виде оно принимает вид

$$\exists p \exists a \forall x (p/a;\ x \equiv x = x).$$

Поскольку знак $p/a;\ b$ является неполным символом, это выражение расписывается в виде

$$\exists p \exists a \forall x \exists q\ (p/a;\ x!\ q\ \&\ \forall r\ (p/a;\ x!\ r \rightarrow r = q))\ \&\ (q \equiv x = x).$$

Здесь $p/a;\ x$ — определенная дескрипция, и она не входит как полный символ.

В данном случае p/a является матрицей. Комбинация двух переменных «представляет» переменную пропозициональную функцию первого порядка. В основе этой техники лежит убеждение Рассела в том, что функция есть ничто без своего аргумента. Поэтому мы не можем «навешивать» квантор на функцию, если не принимать во внимание аргумент. В случае матрицы мы вместо «для всех значений (функции) $\emptyset$» говорим «все значения p и a».

Таким образом, можно найти рекурсивное определение функции, которое переводит каждую формулу *Простой Теории Типов* в подстановочный язык, свободный от типов.

Подстановочная Теория столкнулась с новым парадоксом, что и явилось причиной отказа Рассела публиковать написанную в 1906 г. статью «О подстановочной теории классов и отношений». Теория эта оказалась противоречивой, что понял сам Рассел. Следуя диагнозу причин парадоксов в виде *Принципа Порочного Круга,* Рассел, элиминировав классы и функции, решил отказаться и от общих утверждений, попытавшись реконструировать логическую систему в форме новой теории — *Подстановочной Теории I.* По предположению, такая теория должна была быть достаточно слабой для того, чтобы быть непротиворечивой, но одновременно достаточно сильной для того, чтобы реконструировать классическую математику. Однако Рассел не сумел построить такую теорию.

Следующая попытка в виде *Подстановочной Теории II* имела вид предикативной (в смысле *Принципа Порочного Круга*) логики с универсальной квантификацией. Поскольку *Подстановочная Теория* Рассела была номиналистической по замыслу, имелся только один тип индивидных переменных. Логическая реконструкция в таком виде приводила, как и в первом случае, к иерархии классов, функций и отношений. Но такая же иерархия должна была иметь место и для универсальных утверждений, а именно, должна была существовать иерархия логических фикций, конструируемых на основе индивидов реального мира и элементарных пропозиций. Но Рассел опять-таки не сумел построить такую систему.

Де Рулэн делает вывод, что после неудачи в конструировании иерархии общих пропозиций Рассел решил ее постулировать, приняв как данное определенную иерархию индивидов и пропозиций, которая удовлетворяла *Принципу Порочного Круга.* На основании этой реальной иерархии, используя примитивное понятие подстановки, нужно было сконструировать иерархию фикций в виде функций, классов и отношений. Именно эта теория должна была быть *Подстановочной Теории III,* и сам Рассел упомянул ее в статье «Математическая логика, основанная на теории типов» (1908). Эта теория была одновременно типовая и подстановочная. Тем не менее Рассел не включил *Подстановочную Теорию* даже в виде приложения в «Principia Mathematica», где он вместо этой теории обратился к разветвленной теории типов.

Устоявшееся в истории логики и оснований математики представление о причине такого обращения, которое состоит в том, что, с точки зрения Рассела, парадокс, носящий его имя, и парадокс лжеца имеют единую природу, совершенно ошибочно. Разделение Рамсеем парадоксов на теоретико-множественные и семантические вряд ли было новостью для Рассела, поскольку об этом он знал уже в период разработки *Подстановочной Теории,* а уж ко времени Рамсея он давно оставил эти исследования, за исключением предисловия ко второму изданию «Principia Mathematica», которое только ухудшило программу логицизма. Так что неверно, что разветвленная теория типов, представленная в «Principia Mathematica», была предназначена для разрешения обоих типов парадоксов «единым махом». Действительно, как показал Ландини, разветвленные типы были призваны разрешить парадоксы, которые сам Рассел обнаружил в *Подстановочной Теории.*

Парадокс получается следующим образом. Пусть по определению $F(a,p) = p\frac{x}{a}!q$. Пусть далее, также по определению,

$$p_0 =: (\exists p, a): a_0 = F(a,p): \sim(p\frac{a_0}{a}!q).$$

(В нотации Рассела точки и двоеточия являются пунктуационными знаками, разграничивающими область действия оператора.) Из этих утверждений можно вывести

$$F(a_0, p_0) = F(a, p). \to : p(F(a_0, p_0)/a). \equiv . p_0(F(a_0, p_0)/a_0)$$

(Здесь слэш «/» используется в выражении p/b как матрицы, состоящей из пропозиции p и подставляемой в нее сущности b.) Консеквент этого утверждения противоречив.

Этот парадокс, который Ландини называет p_0/a_0 — парадоксом, можно описать также следующим образом. Каждой паре p и a, образующей подстановочную матрицу, соответствует отдельная пропозиция, например пропозиция ($p \rightarrow a$). По теореме Кантора, должно быть больше пропозициональных матриц (которые обеспечивают эквивалент разговора о классах), чем индивидов (включая пропозиции), и, стало быть, соответствие невозможно. В *Подстановочной Теории* возможно определить пропозицию p_0 и сущность a_0, так чтобы подстановка сущности, подставляемой для a_0 в p_0, давала истину точно в том случае, когда пропозиция формы ($p \rightarrow a$) не удовлетворяет матрице, состоящей из p и a. Если мы тогда рассмотрим, дает или нет истину пропозиция ($p_0 \rightarrow a_0$) при подстановке для a_0 в p_0, мы получаем противоречие.

Подстановочная Теория, по мысли Рассела, должна была реализовать реконструкцию логики с помощью следующих средств:

1) *Подстановочной Не-Класс-Теории,* которая эмулирует простую теорию типов атрибутов (и тем самым классов);

2) кванторной теории без онтологии пропозиций и новой «смягчающей аксиомы», утверждающей о существовании определенных необщих пропозиций, которые выполняют роль отсутствующих общих пропозиций;

3) рекурсивной корреспондентной теории истины для общих утверждений.

При этом все парадоксы классов и атрибутов разрешаются с помощью п. 1, т. е. в рамках *Подстановочной Теории.* Что касается семантических парадоксов, то, как уже было указано выше, они не являются истинными парадоксами, которые требуют реконструкции логики. Оставался p_0/a_0 — парадокс.

Отказ от *Подстановочной Теории* и переход (в некотором смысле внезапный) к разветвленной теории типов теперь можно объяснить двояко. С одной стороны, это результат того, что Рассел не смог разрешить парадокс уже внутри *Подстановочной Теории*. С другой стороны, это могло быть результатом его новой теории истины, в частности принятия им «мультиреляционной теории утверждения». На этом этапе Рассел считал, что истины суть отношение между утверждением (judgement) и фактом. Именно из этой теории возникла теория типов, которая нашла место в «Principia Mathematica».

В свете теории типов пропозиции, как прежде классы, не существуют. Они являются неполными символами и значимы только в контексте, а этим контекстом является чей-то ум. То есть пропозиции должны кем-то утверждаться как истинные или ложные, чтобы иметь значение. Такая трактовка имеет важное следствие: истинными или ложными могут быть не пропозиции, а утверждения. Однако при этом нужно понять, что такое утверждение. Не может ли оно быть отношением ума к пропозиции? Но согласно концепции отношений, которой придерживался Рассел, терминами отношения должны быть существующие вещи. Однако если пропозиций не существует, высказанное предположение не проходит. Поэтому Рассел разработал «мультиреляционную теорию утверждений», согласно которой, например, утверждение «Сократ есть смертен» представляет собой отношение трех вещей: индивида «Сократ», предиката «смертен» и ума, который соединяет их.

В *Разветвленной Теории Типов* Рассел применил эту свою теорию утверждений. Потому что иерархия типов говорит не об объектах, а об утверждениях, более точно, об «уровнях истины». Первый уровень — это утверждения об индивидах, второй — утверждения о классах индивидов (определенных контекстуально в стиле теории дескрипций), и так далее. Пошаговым образом в этой иерархии возникают «порядки» пропозициональных функций (которые рассматриваются как «лингвистические удобства»). Первому уровню утверждений соответствуют обычные пропозиции (при этом нужно иметь в виду, что они на самом деле не существуют), второму уровню соответствуют «пропозициональные функции первого порядка», третьему — «функции второго порядка» и т. д. В результате мы имеем сложную структуру: математические утверждения о числах сводятся к утверждениям о классах, которые, в свою очередь, сводятся к утверждениям о пропозициональных функциях, а те, в свою очередь, вложены в теорию «типов» утверждений. При этом структура выведения математики из логики в «Principia Mathematica» становится довольно сложной, что не способствовало принятию системы в качестве оснований математики.

Отметим еще один важный аспект, связанный с концепцией подстановки, который мог стать причиной отказа от *Подстановочной Теории* в пользу *Разветвленной Теории Типов.* Дело в том, что подстановка не есть лингвистическая операция (ввиду определения тождества, которое превращается в трюизм). Действительно, Рассел определяет тождество в терминах подстановки:

$$x = y. =. x\,(y/x)!x.$$

Но это определение имеет смысл только тогда, когда подстановка не является лингвистической операцией над пропозициями. В противном случае мы имели бы тождество выражений и закон тождества Лейбница был бы тривиализирован. Так что тут не должно быть путаницы между употреблением и упоминанием, но точность приходит «отомщенная»: определение заставляет Рассела принять нелингвистический взгляд на подстановку. А это возвращает к старому пониманию, согласно которому существует все, что мыслится.

Ранний Рассел придавал пропозициям сверхплатонистский статус: «Я верю, что несмотря на свои снежные склоны, сам Монблан есть составная часть того, что действительно утверждается в пропозиции “Монблан выше 4 тысяч метров”. Мы не утверждаем мысль, потому что этот акт носит психологический характер. Мы утверждаем объект мысли, и это, с моей точки зрения, есть определенный комплекс (можно сказать, объективная пропозиция), в котором Монблан сам является составной частью. Если мы не допускаем этого, тогда мы должны прийти к заключению, что вообще ничего не знаем о Монблане»*. Как видно, и *Подстановочная Теория* возвращает Рассела к крайнему платонизму, несмотря на эксплицитные номиналистические намерения. А раз так, то это приводит к крушению идеи подстановки.

Огромное преимущество подстановочного подхода состоит в том, что он показывает, как можно симулировать типовые различия в исчислении, свободном от типов. В приведенном выше примере различие между предикатными и индивидными переменными представлено введением еще двух индивидных переменных, соотносящихся символом «/». Когда мы переходим к типам и матрицам, это остается верным: различие между типами переменных представлено кластером индивидных переменных, связанных определенными подстановочными возможностями. Важным тут является то, что поскольку оно может быть переведено в типовое исчисление, подстановочная теория запрещает самопредикацию и, таким образом, парадокс Рассела. Неправильно построенное предложение $F(0)$ $F(0)$, если его перевести в подстановочный язык, будет иметь вид

$$\exists q(\tfrac{p}{a}; p, a!\, q \& q)$$

$$\exists q(\tfrac{p}{p}; a, a!\, q \& q)$$

Оба выражения не являются грамматически правильно построенными, так как два термина (p или a) ставятся на место, которое должно быть заполнено одним термином.

Главная идея Рассела состоит в демонстрации того, как симулировать типовые ограничения, не отказываясь при этом от представления, что существует только один вид переменных. То есть при подстановочном подходе можно вводить бесструктурные ограниченные переменные, например переменные для функций первого порядка вроде $F(0)$ или $\forall F(0)$, но эти типовые переменные исчезают при переводе. Структурированные переменные — выражение нечеткое.

* *Russell B.* Letter to Frege of 12.12.1904 // Frege G. Philosophical and Mathematical Correspondence. Oxford, 1980. P. 169.

На самом деле структурируются значения, которые выявляются матрицей. Важно заметить: типовые ограничения не запрещены, но прямо представлены подстановочными структурами. Различение двух видов переменной выявляется в структуре, встроенной в переменные, т. е. формами кластера индивидных переменных, которые кодируют типовые переменные.

Ландини показал, что вторая версия подстановочной теории может сопротивляться парадоксу p_0/a_0, более точно, что определенное расширение расселовской теории свободно от противоречий и достаточно сильно, чтобы развить всю арифметику.

Как видно, описанные выше поиски Рассела принадлежат скорее к истории, чем к нынешнему состоянию оснований математики. На обвинения в адрес исследователей этих вопросов в стремлении к восхищению мелкими историческими деталями с антиквариатным душком прекрасно ответил К. Клемент: «Многие из проблем, вынудивших Рассела развить свои теории, в соответствии с которыми не только классы, но и пропозиции, пропозициональные функции и т. п. отвергнуты в качестве экстралингвистических “комплексных сущностей”, имеют прямое отношение к современным проектам, которые работающим исследователям не кажутся полностью реализованными. Действительно, разновидности парадокса Кантора, заставившие Рассела сохранить не только классы как сущности, но и структурированные пропозиции, а вместе с ними и структурированные объективные “пропозициональные функции”, до сих пор не имеют общепринятого разрешения, вопреки общераспространенному мнению. С чего же лучше начать поиски решения тех проблем, если не с того, кто их открыл?»*

* *Klement K.* The Functions of Russell’s No Class Theory // Review of Symbolic Logic. 2010. Vol. 3. No. 4. P. 661.